

Sia $U(X, Y) = 0$ l'equazione di una curva algebrica di grado n , riferita a coordinate ortogonali X ed Y , e sia

$$u(X, Y) = (x_0^n + x_0^{n-1}x_1 + \dots + x_0 x_1^{n-1} + x_1^n) Y^n$$

il complesso dei termini di grado n nel polinomio U .

Sieno x, y le coordinate di un punto arbitrario del piano, ρ l'angolo che una retta uscente da questo punto fa colasse delle X , p la distanza compresa su questa retta fra il punto stesso ed uno degli n punti d'intersezione colla curva U ; X, Y le coordinate di quest'ultimo punto, per modo che si abbia

$$X = x - p \cos \rho, \quad Y = y - p \sin \rho.$$

Sostituendo questi valori

nell'equazione $U = 0$ si ottiene

$$p^n [u(\cos \rho, \sin \rho) + \dots + f(\cos \rho, \sin \rho)] = 0,$$

equazione in p , le cui radici p_1, p_2, \dots, p_n sono gli n segmenti intercettati sulla retta fra il punto (x, y) e la curva U , per cui si avrà

$$f(\cos \rho, \sin \rho) = \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n} \left(-\frac{1}{n} \frac{d}{d\rho} \log \frac{u(\cos \rho, \sin \rho)}{p^n} \right)$$

Quando la retta gira intorno al punto (x, y) , la variazione del prodotto -

non dipende che da quella dell'espressione $u(\cos \rho, \sin \rho)$. Ora se si rappresentano con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ i valori, compresi fra 0 e 2π , degli angoli che annullano quest'espressione (i quali sono, come è noto, gli angoli formati coll'asse delle X dagli n asintoti della curva 17), si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^n} \left(\frac{d}{d\rho} \log \frac{u(\cos \rho, \sin \rho)}{p^n} \right) = \frac{1}{p^n} \left(\frac{d}{d\rho} \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sin(\rho - \alpha_i)} \right) \\ (2) \quad & \frac{d}{d\rho} \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sin(\rho - \alpha_i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{-\cos(\rho - \alpha_i)}{\sin^2(\rho - \alpha_i)} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cot(\rho - \alpha_i) \end{aligned}$$

Volendo dunque considerare le variazioni della quantità - dipendentemente da

quelle di ρ , dobbiamo esaminare il secondo membro della precedente equazione.

Facendo uso di relazioni notissime si trova successivamente

$$\cot(\rho - \alpha_i) = \frac{\sin(\alpha_i)}{\cos(\rho - \alpha_i)}$$

$$\begin{aligned} (9 - 9,) \operatorname{sen} (9 - .pj) = -_ [\cos (9, - cpj - \cos (2 9 - \\ <p; - \ll pj] , \\ \operatorname{sen} \end{aligned}$$